

12.1

- a) Todennäköisyys voidaan lukea suoraan normaalijakauman taulukosta.

$$P(Z \leq 1,34) = \Phi(1,34) \approx 0,9099$$

- b) Päätellään todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$P(Z \geq 1,34) = 1 - P(Z < 1,34) \approx 1 - 0,9099 = 0,0901$$

- c) Käytetään hyväksi jakauman symmetriaa odotusarvon 0 suhteen.

$$\begin{aligned} P(Z \leq -1,06) &= P(Z \geq 1,06) \\ &= 1 - P(Z < 1,06) \\ &= 1 - \Phi(1,06) \\ &= 1 - 0,8554 \\ &\approx 0,1446 \end{aligned}$$

- d) Päätellään todennäköisyys a- ja c-kohtien tulosten avulla.

$$\begin{aligned} P(-1,06 \leq Z \leq 1,34) &= P(Z \leq 1,34) - P(Z \leq -1,06) \\ &= 0,9099 - 0,1446 \\ &\approx 0,7653 \end{aligned}$$

Vastaus

- a) 0,9099
b) 0,0901
c) 0,1446
d) 0,7653

12.2

- a) Olkoon satunnaismuuttuja X : "satunnaisesti valitun 14-vuotiaan suomalaisen tytön pituus senttimetreinä". Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 162,4$ ja keskihajonta $\sigma = 6,1$.

Lasketaan arvoa $x = 168,0$ (cm) vastaava normitettu arvo z .

$$z = \frac{168,0 - 162,4}{6,1} \approx 0,92 \qquad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Määritetään todennäköisyys $P(X \leq 168,0) \approx P(Z \leq 0,92)$, missä satunnaismuuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaa.

$$P(X \leq 168,0) \approx P(Z \leq 0,92) = \Phi(0,92) \approx 0,82$$

14-vuotiaista tytöistä 82 % on alle 168,0 cm pitkiä ja 18 % yli 168,0 cm pitkiä.

- b) Lasketaan arvoa $x = 155,0$ (cm) vastaava normitettu arvo z .

$$z = \frac{155,0 - 162,4}{6,1} \approx -1,21 \qquad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

On määritettävä todennäköisyys $P(X < 155,0) \approx P(Z < -1,21)$. Käytetään hyväksi normitetun normaalijakauman symmetriaa 0:n suhteen.

$$\begin{aligned} P(Z < -1,21) &= P(Z > 1,21) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,21) \\ &= 1 - \Phi(1,21) \\ &= 1 - 0,8869 \\ &\approx 0,11 \end{aligned}$$

14-vuotiaista tytöistä 11 % on alle 155,0 cm pitkiä.

c) Päättellään todennäköisyys a- ja b-kohtien tulosten avulla.

$$\begin{aligned}P(155 \leq X \leq 168,0) &= P(X \leq 168,0) - P(X < 155,0) \\&\approx 0,82 - 0,11 \\&= 0,71\end{aligned}$$

14-vuotiaista tytöistä 71 % on 155,0–168,0 cm pitkiä.

Vastaus

a) normitettu arvo 0,92:

82 %:lla alle 168,0 cm:

18 %:lla yli 168,0 cm

b) normitettu arvo -1,21; 11 %:lla

c) 71 %:lla

12.3

Olkoon satunnaismuuttuja X : "satunnaisesti valitun kuhan pituus senttimetreinä". Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 47,4$ ja keskihajonta $\sigma = 5,9$.

Lasketaan arvoa $x = 42$ (cm) vastaava normitettu arvo z .

$$z = \frac{42 - 47,4}{5,9} \approx -0,92 \qquad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

On määritettävä todennäköisyys $P(X > 42) \approx P(Z > -0,92)$. Käytetään hyväksi normitetun normaalijakauman symmetriaa 0:n suhteen.

$$\begin{aligned} P(Z > -0,92) &= P(Z < 0,92) \\ &= \Phi(0,92) \\ &\approx 0,82 \end{aligned}$$

82 % kuhista ylittää pyynnin alamitan 42 cm.

Vastaus

82 %

12.4

- a) On määritettävä sellainen normitettu arvo a , että $P(Z \leq a) = 0,75$.

Etsitään taulukosta lukua $0,75$ lähinnä oleva todennäköisyys ja sitä vastaava a :n arvo.

$$a \approx 0,67$$

- b) Käytetään hyväksi normaalijakauman symmetriaa.

Taulukon mukaan $P(Z \leq z) = 0,80$, kun $z \approx 0,84$.

Symmetrian nojalla $P(Z \leq a) = 0,20$, kun $a \approx -0,84$.

Vastaus

- a) $a \approx 0,67$
b) $a \approx -0,84$

12.5

- a) Olkoon satunnaismuuttuja X : "satunnaisesti valitun soveltuvuuskokeen tulos pisteinä". Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mu = 60$ ja keskihajonta $\sigma = 8,0$.

On määritettävä sellainen hyväksymisraja, että kokeessa hylätään 50 %.

Normaalijakauman symmetrian perusteella hyväksymisrajan tulee olla 60 pistettä.

- b) On määritettävä sellainen pistemäärä x ja sitä vastaava normitettu arvo z , että

$$P(X \leq x) = P(Z \leq z) = 0,65.$$

Taulukon mukaan $P(Z \leq z) = 0,65$, kun $z \approx 0,39$.

Ratkaistaan normitusyhtälöstä pistemäärä x .

$$\frac{x - 60}{8,0} = 0,39 \quad | \cdot 8,0$$

$$x - 60 = 8,0 \cdot 0,39 \quad | + 60$$

$$x = 8,0 \cdot 0,39 + 60$$

$$\approx 63$$

Hyväksymisrajan tulee olla 63 pistettä.

- c) On määritettävä sellainen pistemäärä x ja sitä vastaava normitettu arvo z , että

$$P(X \leq x) = P(Z \leq z) = 0,10.$$

Käytetään hyväksi normaalijakauman symmetriaa.

Taulukon mukaan $P(Z \leq z) = 0,90$, kun $z \approx 1,28$.

Symmetrian perusteella $P(Z \leq z) = 0,10$, kun $z \approx -1,28$.

Ratkaistaan normitusyhtälöstä pistemäärä x .

$$\frac{x-60}{8,0} = -1,28 \quad | \cdot 8,0$$

$$x - 60 = 8,0 \cdot (-1,28) \quad | + 60$$

$$x = 8,0 \cdot (-1,28) + 60$$

$$\approx 50$$

Hyväksymisrajan tulee olla 50 pistettä.

Vastaus

- a)** 60 pistettä
- b)** 63 pistettä
- c)** 50 pistettä

12.6

Matin koulumatkan kesto X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 17$ minuuttia ja keskihajonta $\sigma = 3$ minuuttia.

On määritettävä sellainen koulumatkan kesto, että vain 5 % koulumatkoista sitä pidempiä eli toisin sanoen 95 % ovat sitä lyhyempiä.

On määritettävä sellainen koulumatkan kesto x ja sitä vastaava normitettu arvo z , että $P(X \leq x) = P(Z \leq z) = 0,95$.

Taulukon perusteella $z \approx 1,65$.

Ratkaistaan normitusyhtälöstä muuttuja x .

$$\begin{aligned}\frac{x-17}{3} &= 1,65 && | \cdot 3 \\ x-17 &= 3 \cdot 1,65 && | +17 \\ x &= 3 \cdot 1,65 + 17 \\ &\approx 22\end{aligned}$$

Matin on lähdettävä kotoa 22 minuuttia ennen koulun alkua.

Vastaus

22 minuuttia

12.7

Normitetun normaalijakauman symmetrian perusteella

$$P(0 \leq Z \leq a) = 0,30.$$

Siten $P(Z \leq a) = 0,50 + 0,30 = 0,80.$

Taulukon perusteella $P(Z \leq a) = 0,80$, kun $a \approx 0,84$.

Vastaus

$$a \approx 0,84$$

12.8

Älykkyystestin tulos X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 100$ ja keskihajonta $\sigma = 15$.

Normaalijakauman symmetrian perusteella normaalien älykkyysten ylärajan alapuolella on 90 % väestöstä.

On määritettävä sellainen älykkyystestin pistemäärä x_1 ja sitä vastaava normitettu arvo z_1 , että $P(X \leq x_1) = P(Z \leq z_1) = 0,90$.

Taulukon perusteella $z_1 \approx 1,29$.

Ratkaistaan normitusyhtälöstä muuttuja x_1 .

$$\begin{aligned}\frac{x_1 - 100}{15} &= 1,29 && | \cdot 15 \\ x - 100 &= 15 \cdot 1,29 && | + 100 \\ x &= 15 \cdot 1,29 + 100 \\ &\approx 119,35\end{aligned}$$

Normaaliälykkyysten yläraja on 120 pistettä.

Normaalijakauman symmetrian perusteella normaalien älykkyysten alarajaa x_2 vastaa normitettu arvo $z_2 = -1,29$.

Ratkaistaan normitusyhtälöstä muuttuja x_2 .

$$\begin{aligned}\frac{x_2 - 100}{15} &= -1,29 && | \cdot 15 \\ x - 100 &= 15 \cdot (-1,29) && | + 100 \\ x &= 15 \cdot (-1,29) + 100 \\ &\approx 80,65\end{aligned}$$

Normaaliälykkyyden alaraja on 80 pistettä.

Vastaus

80 pistettä tai vähemmän ja 120 pistettä tai enemmän saaneet

12.9

Tehtävänä on määrittää kahvipaketin massan X odotusarvo μ , kun keskihajonta $\sigma = 10$ (g).

Olkoon arvoa $x = 500$ (g) vastaava normitettu arvo z .

Tulee olla $P(X < 500) = P(Z < z) = 0,02$.

Käytetään hyväksi normitetun normaalijakauman symmetriaa.

Taulukon perusteella $P(Z < z) = 0,98$, kun $z \approx 2,05$.

Symmetrian perusteella $P(Z < z) = 0,02$, kun $z \approx -2,05$.

Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan μ .

$$\begin{aligned}\frac{500 - \mu}{10} &= -2,05 && | \cdot 10 \\ 500 - \mu &= -2,05 \cdot 10 && | - 500 \\ -\mu &= -2,05 \cdot 10 - 500 && | \cdot (-1) \\ \mu &= 2,05 \cdot 10 + 500 \\ &\approx 521\end{aligned}$$

Odotusarvoksi pitäisi säätää 521 g.

Vastaus

521 g

12.10

Tehtävänä on määrittää 7-vuotiaiden poikien pituuden X odotusarvo μ ja keskihajonta σ .

Puolet pojista ovat alle 125 cm pitkiä.

Normaalijakauman symmetrian perusteella pituuden odotusarvo $\mu = 125$ (cm).

Pisimmät 7 % pojista ovat yli 132 cm pitkiä, joten 97 % pojista ovat tätä lyhyempiä.

Olkoon arvoa $x = 132$ (cm) vastaava normitettu arvo z .

Tulee olla $P(X \leq 132) = P(Z \leq z) = 0,93$.

Taulukon perusteella $z \approx 1,48$.

Muodostetaan normitusyhtälö ja ratkaistaan σ .

$$\frac{132 - 125}{\sigma} = 1,48$$

$$\frac{7}{\sigma} = 1,48 \quad | \cdot \sigma$$

$$7 = 1,48\sigma \quad | :1,48$$

$$\sigma = \frac{7}{1,48} \approx 5$$

Keskihajonta on 5 cm.

Vastaus

odotusarvo 125 cm, keskihajonta 5 cm